Références :
Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, François Rouvière
Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly

Théo. *Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) \text{ avec } \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de la fonction f, on a :

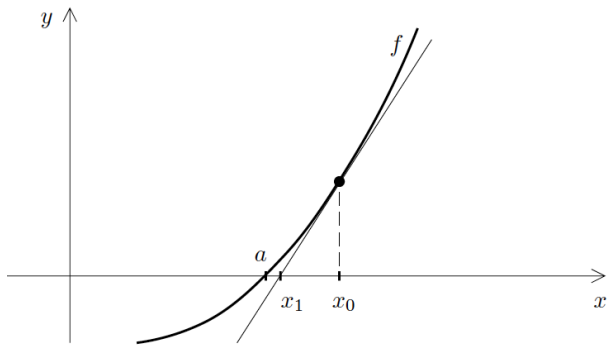
(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique et il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

$$\mid x_{n+1} - a \mid \leq C \mid x_n - a \mid^2$$

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [a,d], f''(x) > 0$ alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que f est strictement croissante et que $0 \in]f(c), f(d)[$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $a \in]c,d[$ tel que $f(a) = 0$. Le but de la méthode de Newton est de d'approcher a à partir d'une valeur grossière x_0 qui aura été déterminée précédemment (par exemple, par dichotomie) avec une vitesse de convergence quadratique.



L'idée est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

x_1 est en général une meilleure approximation de a que x_0. On veut donc réitérer la fonction

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

afin de créer une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

(i) Comme $f(a) = 0$, on peut écrire, pour $x \in [c,d]$,

$$\begin{aligned} \phi(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, il existe $z_x \in [\min(a,x), \max(a,x)]$ tel que

$$\phi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2.$$

Prenons $C = \frac{\max_{[c,d]}|f''|}{2\min_{[c,d]} f'}$ et on obtient l'inégalité

$$\mid \phi(x) - a \mid \leq C \mid x - a \mid^2, x \in [c, d].$$

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour que $C\alpha < 1$ et que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit contenu dans $[c, d]$. Alors $x \in I$ entraîne que $\mid \phi(x) - a \mid \leq C\alpha^2 < \alpha$ d'où $\phi(I) \subset I$. Ainsi, si $x_0 \in I$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in I$ et

$$\mid x_{n+1} - a \mid = \mid \phi(x_n) - a \mid \leq C \mid x_n - a \mid^2$$

d'où

$$C \mid x_n - a \mid \leq (C \mid x_0 - a \mid)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

et la convergence quadratique de x_n vers a puisque $C\alpha < 1$.

(ii) Pour $a < x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x.$$

D'après (i), on a d'autre part

$$\phi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x - a)^2 > 0.$$

Ces deux inégalités montrent que l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par ϕ et que pour $a < x_0 \leq d$, les itérés de x_n vérifient aussi $a < x_n \leq d$ et forment une suite strictement décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est constante. La suite (x_n) admet donc une limite l, qui vérifie $\phi(l) = l$, donc $f(l) = 0$ et l ne peut être que a.

La convergence des x_n vers a est quadratique et on a, comme en (i),

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2.$$

Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale, si $a < x_0 \leq d$, on a $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

d'après (i), avec $a < z_n < x_n$. La fraction tend donc vers $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$ lorsque $n \to \infty$.

□

Leçons possibles : 218 - 223 - 224 - 226